

Análisis estructural de algunas obras de Félix Candela mediante modelos de elementos finitos

Finite element model analysis of works authored by Félix Candela

Javier Oliva Quecedo⁽¹⁾, Pablo Antolín Sánchez⁽¹⁾, Alfredo Cámara Casado⁽¹⁾ y José M. Goicolea Ruigómez⁽²⁾

Recibido | Received: 11-05-2010
Aceptado | Accepted: 05-07-2010

Resumen

Por su facilidad constructiva y la relativa sencillez de su análisis estructural, el paraboloide hiperbólico de hormigón armado es una forma profusamente utilizada por el arquitecto Félix Candela (1910-1997). En este artículo se analiza el comportamiento de varias de esas obras. Concretamente dos paralelogramos alabeados [1], el restaurante Los Manantiales (México) y la Iglesia de Guadalupe (Madrid). Se explica la geometría del paraboloide hiperbólico y se describe brevemente el análisis estructural presentado por Félix Candela. Los resultados presentados posteriormente confirman la distribución de esfuerzos descrita por Candela. En todos los casos estudiados las tensiones resultan ser admisibles para el hormigón. Se ha verificado también el comportamiento de membrana de las estructuras mediante un factor cuyo valor oscila entre 0 (flexión pura) y 1 (membrana pura). El comportamiento se aleja o acerca al de membrana pura en función de las condiciones de apoyo como ya recalcó el arquitecto madrileño.

Palabras clave: Félix Candela, lámina, paraboloide hiperbólico, Xochimilco, Guadalupe, hormigón armado, análisis estructural.

Abstract

Because it is easy to build and due to the relative simplicity of its structural analysis the hyperbolic paraboloid made of reinforced concrete is highly employed by the architect Félix Candela (1910-1997). In this article the structural behaviour of several such works is analyzed. Specifically two warped parallelograms [1], Los Manantiales restaurant (Mexico) and Guadalupe church (Madrid). The hyper geometry and the structural analysis reported by Candela are briefly explained. In all cases the stresses are allowable for the material. We have verified the membrane behaviour of the structures by means of an index which value oscillates between 0 (pure bending) and 1 (pure membrane). This index depends on the support conditions of the shell, as Candela remarked.

Keywords: Felix Candela, shell, hyper, Xochimilco, Guadalupe, reinforced concrete, structural analysis.

* An extensive English language summary of the present article is provided on page 104 of this issue both for the convenience of non-Spanish-speaking readers and inclusion in databases.

(1) Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid, España).

(2) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid, España).

Persona de contacto / Corresponding author: joliva@mecanica.upm.es

1. INTRODUCCIÓN

Félix Candela ha sido una figura excepcional en el ámbito general de la ciencia de la construcción. Sus estructuras laminares son conocidas en todo el mundo y han servido de inspiración a ingenieros y arquitectos. Con motivo del centenario de su nacimiento (27 de Enero de 1910) se han celebrado numerosos actos para recordar su figura y su obra. En ese marco se han analizado mediante modelos de elementos finitos algunas de sus obras más representativas. Concretamente se estudian dos de los modelos canónicos compuestos por asociación de paralelogramos alabeados [1], la cubierta del restaurante Los Manantiales en Xochimilco (México) y la Iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe en Madrid (España). Todas ellas son estructuras laminares con forma de paraboloides hiperbólicos.

2. EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Las láminas son elementos estructurales que aparecen tanto en la naturaleza (huevos, cráneos...) como en multitud de obras de ingeniería (fuselajes de aviones, tanques de almacenamiento de líquidos, cascos de submarinos, cubiertas de edificios...). En este tipo de elementos la forma determina su comportamiento estructural, por eso es importante centrarnos primeramente en la descripción de la geometría para poder entender el comportamiento resistente de las obras que vamos a estudiar.

Una superficie curva se dice *desarrollable* cuando puede reducirse a una superficie plana sin deformarla, por ejemplo una bóveda cilíndrica puede desarrollarse en un rectángulo. Una superficie *no desarrollable* requiere deformarse para transformarse en un plano, como ejemplo pensemos en una bóveda semiesférica. De esta forma las superficies no desarrollables tienen más recursos resistentes [2].

Si cortamos una superficie por una serie de planos que contienen a la normal en un punto, obtenemos una serie de curvas. De todas esas curvas, hay una que tiene la máxima curvatura en ese punto (K_1) y otra con un valor mínimo (K_2). K_1 y K_2 se conocen como *curvaturas principales* de la superficie. El producto de las curvaturas principales es la *curvatura gaussiana*, K . Si una de las curvaturas principales es nula, la curvatura gaussiana también lo será, por ejemplo en una lámina cilíndrica. Esas superficies se llaman de curvatura simple. Si K es

positiva; es decir, si las dos curvaturas principales son del mismo signo, se dice que es una superficie *sinclástica* o *elíptica*. Si las dos curvaturas principales son de distinto signo K será negativa y la superficie será *anticlástica* o *hiperbólica* (Figura 1). Tanto las superficies sinclásticas como anticlásticas son de doble curvatura.

Primeramente hay que distinguir entre láminas *apropiadas* e *inapropiadas* [3]. Para que una lámina sea apropiada ha de tener doble curvatura; es decir, ha de ser no desarrollable. Su comportamiento estructural es predominantemente de membrana; es decir, los esfuerzos actúan mayoritariamente en su plano. Por el contrario, en las láminas inapropiadas gran parte del comportamiento estructural es de flexión. Cuando las secciones trabajan a flexión sólo las fibras extremas están trabajando a su máxima capacidad y eso cuando el material resiste tanto tracciones como compresiones. En el caso del hormigón los esfuerzos de tracción se concentran en la armadura con lo cual aproximadamente dos tercios de la sección se convierten en un peso muerto. A partir de ahí Candela enuncia en una de sus conferencias en México lo que define como “un principio económico fundamental”: “hay que evitar, en lo posible, los esfuerzos de flexión, mediante la elección de una forma apropiada” [4]. Una superficie de curvatura simple como una bóveda cilíndrica puede trabajar en gran parte como membrana bajo ciertas distribuciones de carga para las que su forma sea antifunicular, pero cuando aparecen otras cargas se desarrolla flexión en la estructura. Sin embargo, las superficies de doble curvatura, si se sujetan adecuadamente, pueden trabajar sólo como membranas, independientemente de las cargas aplicadas. Esto puede verse comparando la rotura de una bóveda cilíndrica con la de una bóveda esférica bajo cargas verticales; la primera fallará por flexión, la segunda por tracción, aunque existan flexiones (Figura 2).

El conoide, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico son superficies anticlásticas que pueden generarse mediante líneas rectas (superficies regladas). Debido a eso son superficies más simples de construir que las sinclásticas. El paraboloides hiperbólico tiene la ventaja sobre las otras dos de que la sencillez de su definición geométrica hace que su funcionamiento estructural sea más fácil de plantear y comprender.

2.1. Definición de la superficie

Consideremos dos rectas en el espacio, HOD y ABC, que se cruzan; es decir, que no son paralelas ni se cortan

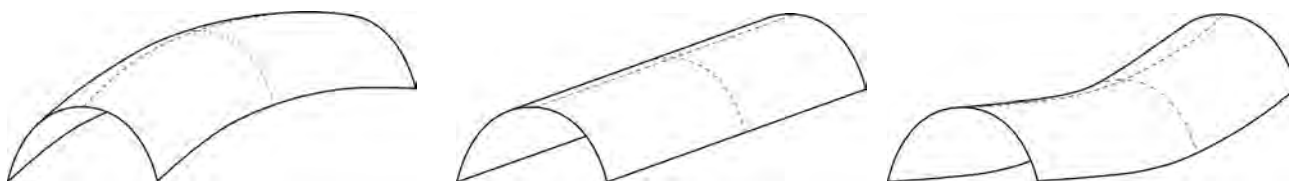


Figura 1. Superficies según su curvatura gaussiana: (a) Doble curvatura sinclástica ($K > 0$); (b) Curvatura simple ($K = 0$); (c) Doble curvatura anticlástica ($K < 0$)

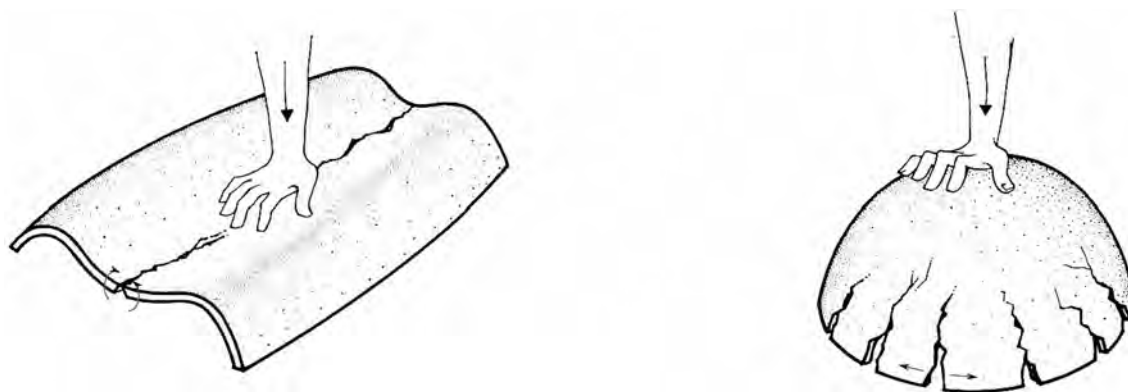


Figura 2. Fallo a flexión de la curvatura simple - Fallo a tracción de la curvatura doble

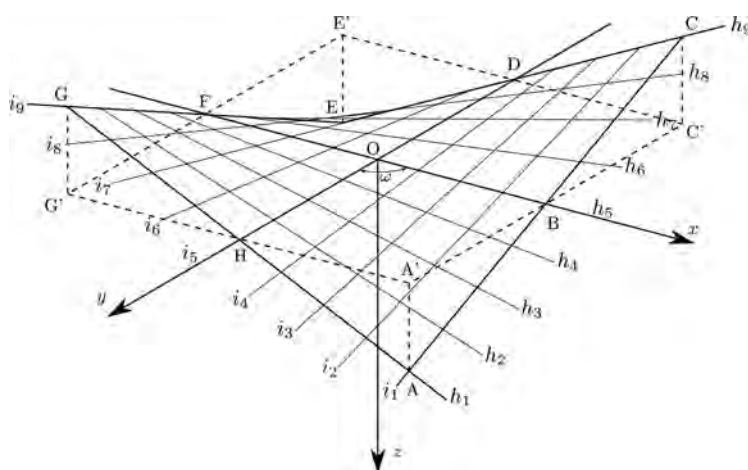


Figura 3. Definición de la superficie

(Figura 3). Las rectas h_i que se apoyan en ambas rectas y que son paralelas a un determinado plano xOz llamado plano director definen la superficie. Esa familia de rectas h_i se denomina el primer sistema de generatrices. A su vez las rectas HOD y ABC determinan otro plano director yOz que es paralelo a las dos. Así, la superficie puede entenderse también como generada por un segundo sistema de generatrices, la familia de rectas i_j que son paralelas a ese plano y que cortan a todas las generatrices del primer sistema (h_i).

Así que el paraboloides hiperbólico contiene dos sistemas de líneas rectas, las rectas de cada uno de ellos son paralelas a un plano director y esos dos planos directores forman entre sí un ángulo cualquiera ω . Entonces, por cada punto de la superficie pasa una recta de cada uno de los dos sistemas de generatrices. Hay que resaltar que el ángulo xOy puede ser cualquiera mientras que xOz e yOz serán ángulos rectos.

La ecuación en coordenadas cartesianas de esa superficie será:

$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \quad (1)$$

Si utilizamos los ejes x e y definidos anteriormente, la

ecuación del paraboloides hiperbólico se puede escribir como:

$$z = kxy \sin(\omega) \quad (2)$$

donde k es una constante que representa el alabeo unitario del paraboloides; $k = AA' / (OB \cdot OH \cdot \sin \omega)$ en la Figura 3. Los ejes x e y sólo serán perpendiculares en el caso de que $a = b$ y en ese caso ω será igual a 90° .

Si cortamos la superficie por los bisectores de los planos directores obtendremos dos parábolas (GOC y EOA) que se conocen como *parábolas principales*, las curvaturas de ambas son de signo contrario como corresponde a una superficie anticlastica.

Otra forma de entender esta superficie es considerarla como generada por una parábola principal P_1 que se mueve manteniéndose paralela a sí misma a lo largo de otra parábola principal P_2 . Así la superficie tiene dos sistemas de generatrices parabólicas.

2.2. Análisis estructural

Para explicar el comportamiento estructural de los paraboloides hiperbólicos Félix Candela se basa en las

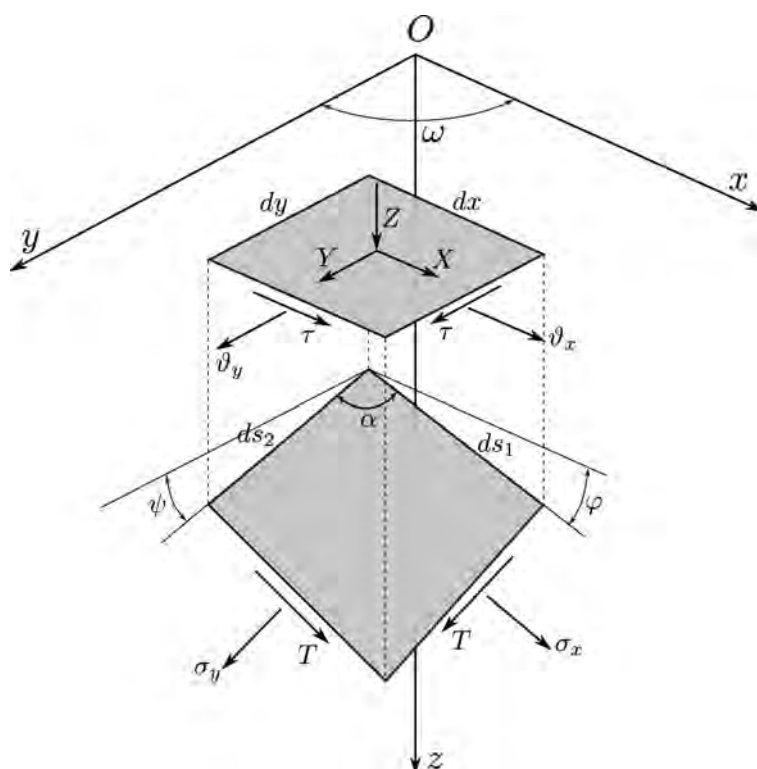


Figura 4. Elemento de superficie y su proyección

ecuaciones de equilibrio, dejando a un lado las de la elasticidad. No porque no las conozca o no las domine, sino porque opina que debido a la naturaleza del hormigón se producirán redistribuciones de esfuerzos que apartarán a la estructura del estado tensional obtenido utilizando las ecuaciones de la elasticidad: “...los métodos basados en la teoría de la elasticidad no son apropiados para el análisis de estructuras hiperestáticas de concreto armado, y como estos métodos son los únicos admitidos por la mayoría de los Reglamentos, nos encontramos con el hecho insólito de que no podemos aplicar, para el cálculo de estructuras de concreto armado —casi el único material estructural— métodos que estén de acuerdo con sus características.” [5]. Además la propia delgadez de las láminas hará que la contribución de la flexión sea pequeña y eso llevará a la estructura a un estado de membrana más eficiente.

Candela presenta en dos artículos el cálculo estructural de láminas de hormigón con forma de paraboloides hiperbólicos [1, 6] utilizando las fórmulas generales para tensiones de membrana en una superficie de cualquier forma desarrolladas por Pucher [7]. Planteando el equilibrio en los ejes x , y y z en un elemento como el de la Figura 4 y considerando que un paraboloides hiperbólico se define con la ecuación (2), se llega a la solución de las tensiones proyectadas reales por unidad de anchura para un caso general donde las cargas aplicadas por unidad de superficie sean X_1 , Y_1 y Z_1 (X , Y y Z por unidad de superficie proyectada) en cada uno de los ejes x , y y z :

$$\tau = \left(\frac{y}{2} X_1 + \frac{x}{2} Y_1 - \frac{Z_1}{2k} \right) \sqrt{\phi} \quad (3)$$

$$\theta_x = (A_1 x + A_2 y + A_3) \sqrt{\phi} + (A_4 y^2 + A_5 y + A_6) \ln(X_7) + f_1(y) \quad (4)$$

$$\theta_y = (B_1 y + B_2 x + B_3) \sqrt{\phi} + (B_4 x^2 + B_5 x + B_6) \ln(Y_7) + f_2(x) \quad (5)$$

donde $\phi = \sin^2 \omega + k^2 y^2 + k^2 x^2 - 2k^2 xy \cos \omega$; A_i y B_i son constantes que dependen de la carga aplicada, del ángulo ω y de la constante k ; X_7 y Y_7 son funciones de x y y . $f_1(y)$ y $f_2(x)$ son funciones arbitrarias de integración de una sola variable. Esa indeterminación de las tensiones σ_x y σ_y (o de sus proyecciones) nos permite satisfacer cualquier condición de contorno que queramos imponer.

Si proyectamos sobre el plano tangente a la estructura podemos obtener las tensiones reales en función de las tensiones θ_x , θ_y y τ :

$$\sigma_x = \theta_x \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}; \quad \sigma_y = \theta_y \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}; \quad T = \tau \quad (6)$$

En las ecuaciones (3), (4) y (5) podemos ver que el valor de T queda fijado, pero σ_x y σ_y varían dependiendo de las funciones de integración $f_1(y)$ y $f_2(x)$ que se escojan. Eso significa que las tensiones normales en una superficie ilimitada están indeterminadas. Para fijarlas nece-

sitamos imponer unas condiciones de contorno, así tenemos cierta libertad en la disposición de los apoyos.

Paraboloides hiperbólicos limitados por bordes rectos

Debido a la definición de la superficie, para que el borde sea recto tendrá que ser una generatriz. Si queremos una estructura o elemento estructural que sea un paralelogramo alabeado limitado por generatrices rectas, podemos dejar dos bordes contiguos libres de tensiones eligiendo unos valores determinados de las funciones de integración f_1 y f_2 . Pero eso fijará los valores de las tensiones en los otros dos bordes, esas tensiones tendrán que ser absorbidas mediante un apoyo continuo, lo que supone la introducción de esfuerzos adicionales que alteran el estado de tensiones de los puntos interiores. De ahí podemos deducir que un cuadrilátero alabeado bajo su peso propio no puede estar en equilibrio salvo que dos lados contiguos estén sujetos de forma que puedan soportar cargas en cualquier dirección. Si asociamos varios cuadriláteros las condiciones de simetría pueden simplificar las condiciones de apoyo necesarias, pero siempre quedarán esfuerzos no equilibrados. En caso de que dejemos el borde libre sin sujetar, sus deformaciones nos alejarán del estado de membrana en las zonas cercanas a él, lo que dará lugar a la aparición de esfuerzos de flexión. En la práctica, si el borde queda libre, será necesario disponer un elemento de rigidez en ese borde. En el caso de elegir una viga de rigidez gruesa se perjudica la expresión formal y la estética.

Paraboloides hiperbólicos limitados por bordes curvos

Las tensiones normal y tangencial en una sección cualquiera, no paralela a ninguna generatriz que esté contenida en un plano que forme un ángulo β con el plano director xOz , vienen dadas por las siguientes expresiones [1]:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \frac{\sin^2 \beta}{\sin \alpha} + 2\tau \frac{\sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} + \sigma_y \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \quad (7)$$

$$\tau_\beta = \sigma_x \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha} - \tau \frac{\sin(2\beta - \alpha)}{\sin \alpha} - \sigma_y \frac{\sin(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \quad (8)$$

Al poder σ_x y σ_y tomar cualquier valor, es posible elegir $f_1(y)$ y $f_2(x)$ de tal manera que en un borde curvo no paralelo a ninguna generatriz σ_β y τ_β tomen un valor cualquiera, incluso por ejemplo cero, lo que hará que

ese borde libre quede sin tensiones. Los demás bordes de la estructura tendrán unas tensiones que quedan fijadas al elegir esas funciones de integración. En [6] se presenta un ejemplo del cálculo de una estructura en la que un borde libre curvo se deja voluntariamente sin tensiones. En este caso los bordes no necesitan una rigidez adicional, con lo cual pueden quedar con el mismo espesor que el resto de la lámina, esto permite una mejor expresión del formalismo estructural.

3. CASOS DE ESTUDIO

A continuación se analizan mediante modelos de elementos finitos algunas cubiertas laminares de Félix Candela cuya geometría corresponde a la del paraboloides hiperbólico. Para ello se ha utilizado la versión 6.8 del paquete Abaqus [8]. Se han realizado cálculos lineales con un material elástico y empleando elementos lámina S4R (cuadriláteros de cuatro nodos con integración reducida). También se ha evaluado la influencia de la no linealidad geométrica, resultando esta despreciable. El caso de carga considerado corresponde al peso propio de la lámina con la particularidad de que su valor se multiplica por dos. Las propiedades del hormigón utilizadas son $E=30$ MPa, $\nu=0,2$ y $\rho=2.500$ kg/m³.

Para evaluar de manera sencilla el comportamiento de membrana o de flexión de la lámina, se propone un índice (escalar) cuyo valor en cada punto está entre 0 (flexión pura) y 1 (membrana pura). Representa la fracción de la densidad de energía elástica total que corresponde a los esfuerzos de membrana:

$$\begin{aligned} W_{\text{memb}} &= \frac{1}{2} (n_{xx} \epsilon_{xx} + n_{yy} \epsilon_{yy} + 2n_{xy} \epsilon_{xy}) \\ W_{\text{flex}} &= \frac{1}{2} (m_{xx} \kappa_{xx} + m_{yy} \kappa_{yy} + 2m_{xy} \kappa_{xy}) \\ F_{\text{memb}} &= \frac{W_{\text{memb}}}{W_{\text{memb}} + W_{\text{flex}}}, \quad 0 \leq F_{\text{memb}} \leq 1 \end{aligned} \quad (9)$$

donde (n_{xx}, n_{yy}, n_{xy}) son los esfuerzos (axiales, cortante) de membrana, $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy})$ las deformaciones asociadas, (m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}) los esfuerzos de placa (flectores y torsor) y $(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy})$ las curvaturas asociadas, estando todos ellos expresados por unidad de longitud de la lámina.

Los casos estudiados son:

- Dos casos canónicos de estructuras formadas por asociación de paralelogramos alabeados. Concretamente los denominados A y D [1].
- El restaurante Los Manantiales en Xochimilco (México).
- La Iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe en Madrid (España).

3.1. Paralelogramos alabeados asociados

Estas estructuras están formadas por cuatro paralelogramos alabeados asociados, cada uno de los cuales es un paraboloides hiperbólico. En el caso de carga considerado, los valores de las cargas horizontales por unidad de superficie, X_l e Y_l , son nulos. Además los paraboloides de este tipo de estructuras son equiláteros; es decir, el valor de ω es 90° . Eso da lugar a una simplificación de las expresiones (4) y (5) que definen las tensiones ϑ_x y ϑ_y . En el caso de que el alabeo sea pequeño ($k \leq 0,04$) la carga correspondiente al peso propio puede suponerse constante en proyección horizontal lo cual hace que el valor de τ sea constante y tanto ϑ_x como ϑ_y se anulen si escogemos unas funciones de integración nulas. En ese caso las tensiones principales tienen el valor absoluto de τ pero con diferente signo cada una de ellas y sus direcciones forman 45° con las generatrices. Es decir, tenemos una dirección de compresión y otra de tracción que forman 90° entre sí (Figura 5). No habrá tensiones normales en las generatrices que hacen de bordes ya que son direcciones de cortante puro. Esos cortantes no equilibrados de los bordes rectos darán lugar a unas tensiones tangenciales que serán las únicas reacciones de la estructura. Cuando el alabeo crece, la lámina se aleja de ese comportamiento de cortante puro y los valores de ϑ_x y ϑ_y dejan de ser nulos y, por tanto, aparecen tensiones normales en las generatrices. En cualquiera de los dos casos, si el borde queda sin sujetar sus deformaciones nos alejarán del estado de membrana en las zonas cercanas a él, lo que dará lugar a la aparición de esfuerzos de flexión.

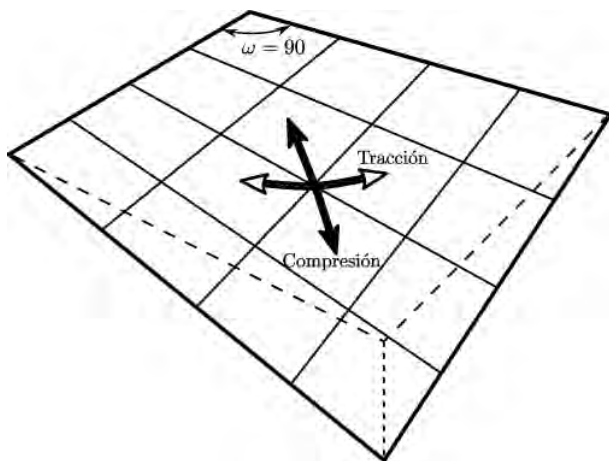


Figura 5. Direcciones de tracción y compresión

3.3.1. Forma A – Paraguas

La forma A, también denominada *paraguas* (Figura 6), es muy utilizada por Candela en almacenes, mercados y fábricas de Ciudad de México: mercado de Coyoacán (1955), mercado de Anahuac (1956), bodegas Rio (1954), fábrica de Industrias Cavalier (1955)...

El modelo que aquí se analiza no corresponde a ninguna obra en particular, sino que trata de ser un

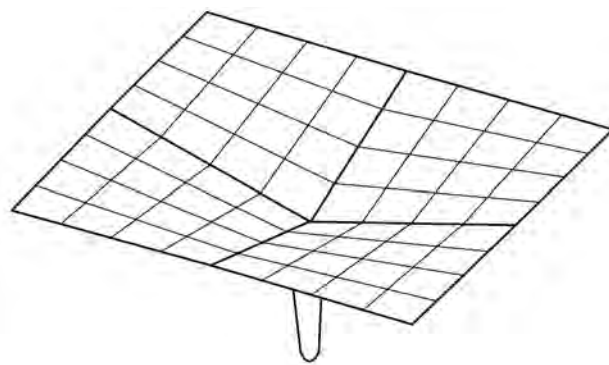


Figura 6. Forma A [1]



Figura 7. Modelo experimental de un paraguas (1953)

análisis general de este tipo de estructuras. Se han tomado unas dimensiones en planta de $8 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ y una profundidad del punto central respecto a los extremos de $1,6 \text{ m}$. Las dimensiones en planta se han elegido similares a las del modelo experimental de la Figura 7 y la profundidad es tal que el alabeo unitario es del orden del utilizado en las obras reales de Candela. Ese alabeo unitario será $k = 1,6 / (4 \cdot 4 \cdot \sin 90^\circ) = 0,1 \text{ m}^{-1}$. El espesor de la lámina es 4 cm .

Cada uno de los cuatro paraboloides tiene dos bordes contiguos acoplados a un paraboloides adyacente, lo cual equilibrará en parte esa zona, y los otros dos totalmente libres. Así que el comportamiento se alejará del de membrana como hemos explicado anteriormente.

En la Figura 8 se muestran las direcciones principales de tensiones en la fibra media del modelo que hemos analizado. Lejos de los bordes las direcciones siguen el patrón explicado anteriormente con dos direcciones de tracción y compresión orientadas formando 45° con las generatrices. En los bordes se aleja de ese patrón y las direcciones se orientan paralelamente a dichos bordes de forma que en los valles se concentran las compresiones y en los bordes libres las tracciones, lo que confirma los cálculos de [1]. Debido a ello, los bordes libres necesitan una armadura adicional de tracción para evitar problemas derivados de la fisuración.

En cuanto a las tensiones nos encontramos con que no superan en ningún caso los 3 MPa . Concretamente las máximas tensiones de tracción aparecen en los bordes

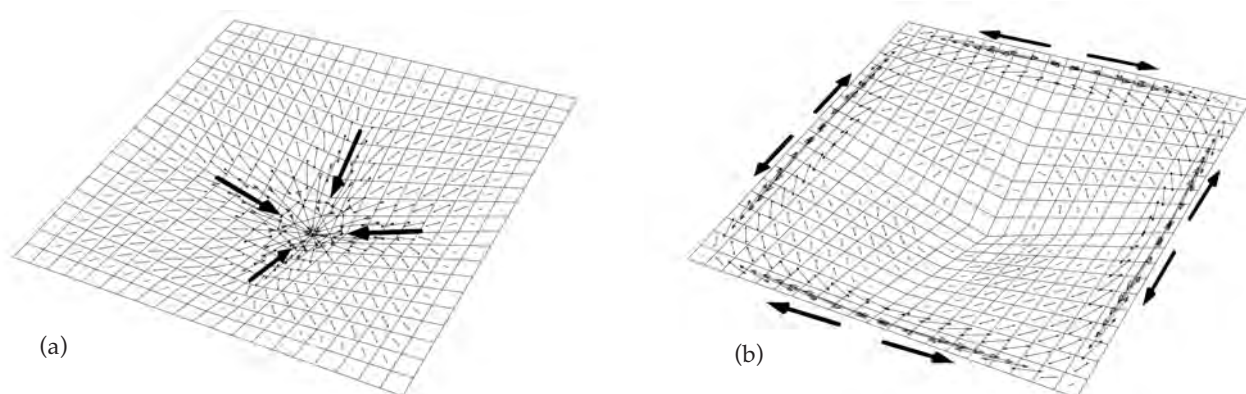


Figura 8. Direcciones principales de tensiones en la Forma A: (a) Compresiones; (b) Tracciones

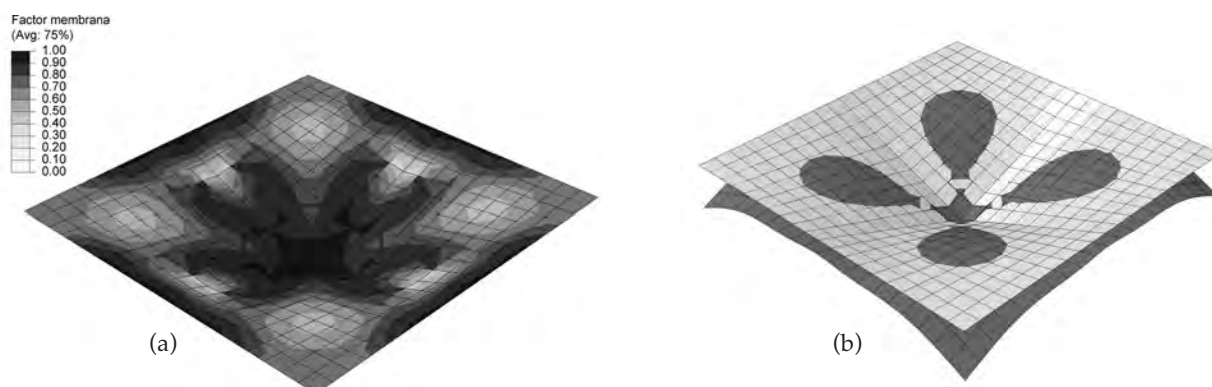


Figura 9. Forma A: (a) Factor de membrana; (b) Deformada, Blanco=Sin deformar, Gris=Deformada (x200)

libres, donde Candela dispone una armadura de tracción adicional, y toman un valor máximo de 2,71 MPa. Las compresiones más fuertes aparecen en el centro de la estructura y llegan hasta un valor máximo de 2,14 MPa.

En la Figura 9a aparece la distribución del factor de membrana definido anteriormente. Como puede verse los factores se alejan de la unidad sobre todo en el centro de cada uno de los cuatro paraboloides debido a que al estar los bordes libres aparecen flexiones secundarias como puede verse en la deformada (Figura 9b).

Para ayudar a mejorar el comportamiento de membrana habría que transmitir a la estructura las tensiones de corte necesarias en los bordes. Eso se puede conseguir rigidizando los bordes por ejemplo mediante una viga de rigidez o un tirante, esta última opción tiene la

ventaja de que no afecta a la expresión formal. Para simular ese efecto en nuestro modelo numérico hemos fijado los nodos de los bordes en esa dirección (paralela al propio borde), esto representaría la acción de una barra o tirante muy rígido dispuesto en ese borde. En la Figura 10 podemos ver que el factor de membrana mejora y que la deformación debida a flexiones secundarias se reduce claramente.

Candela utiliza también un análisis simple e intuitivo [9] para confirmar sus cálculos: se trata de asumir que media estructura (es decir dos paraboloides consecutivos) se comporta como un voladizo y que las cargas se concentran en los bordes y en el valle de unión entre los dos paraboloides (Figura 11). En un caso de carga como el que nos ocupa es sencillo calcular la carga de media estructura y el punto de aplicación de su resultante, que

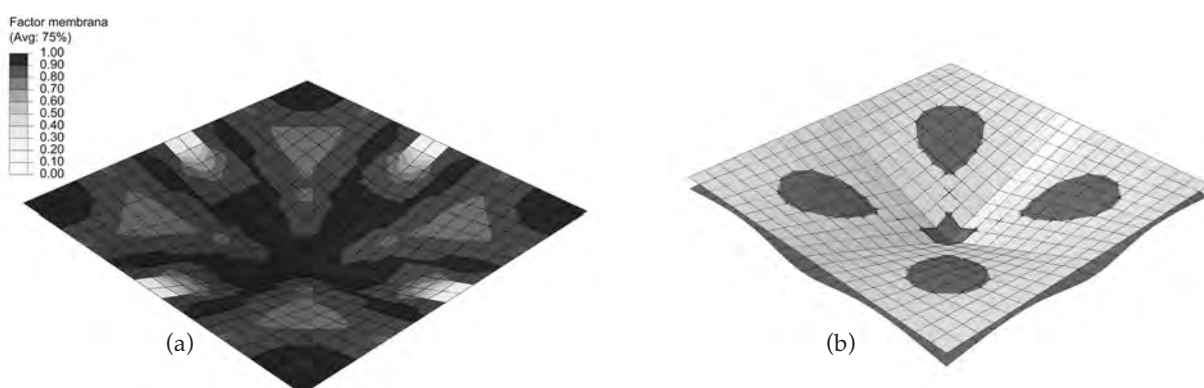


Figura 10. Forma A con los bordes fijos en su dirección: (a) Factor de membrana; (b) Deformada, Blanco=Sin deformar, Gris=Deformada (x200)

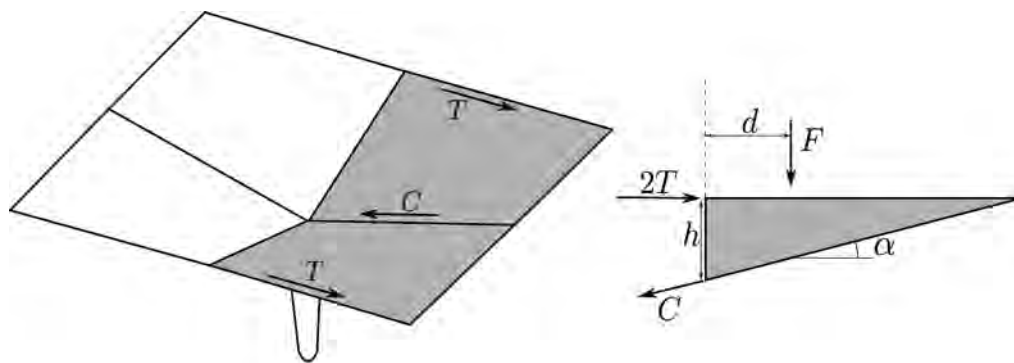


Figura 11. Forma A – Análisis voladizo

estará a una distancia d del punto central. Esa carga se descompone en las tracciones en los bordes, T , y en la compresión en el valle, C . Entonces:

$$Fd = 2Th \Rightarrow T = \frac{Fd}{2h} \quad (10)$$

y C se obtiene directamente planteando el equilibrio en dirección horizontal:

$$C \cos \alpha = 2T \Rightarrow C = \frac{2T}{\cos \alpha} \quad (11)$$

En nuestro caso el peso total de la estructura es de 131,9 kN, así que el valor de F será la mitad ($F = 65,95$ kN). El valor de d es 1,98 m, con lo que considerando que $h = 1,60$ m, tenemos un valor de $T \approx 40,8$ kN. Dado que $\alpha = \arctan(1,6/4) = 21,8^\circ$, el valor de C será $C = 2 \cdot 40,8 / (\cos 21,8^\circ) \approx 87,9$ kN.

En nuestro modelo de elementos finitos obtenemos los valores correspondientes al borde integrando las tensiones en las dos filas extremas de elementos y los valores del valle con las cuatro filas centrales, que es donde se concentran los esfuerzos. Obtenemos unos valores $T_{EF} = 40,0$ kN y $C_{EF} = 87,7$ kN, que son valores muy similares a los obtenidos en el cálculo simple antes citado.

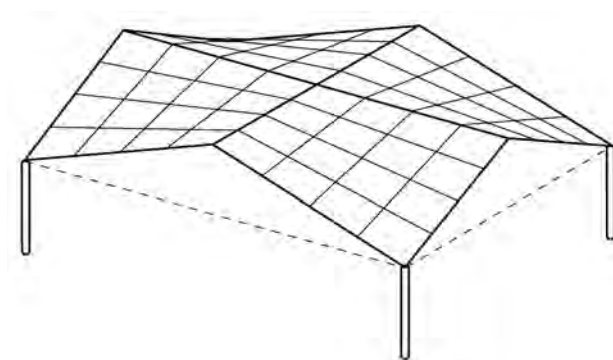


Figura 12. Forma D [1]



Figura 13. Fábrica de Sedas Parisina (Foto de [3])

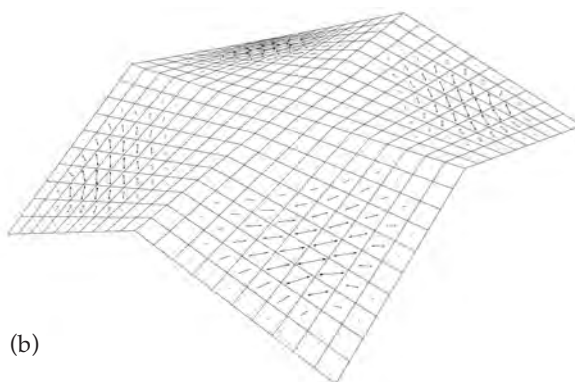
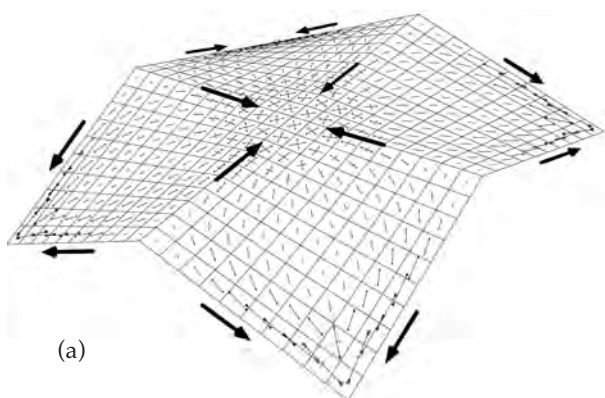


Figura 14. Direcciones principales de tensiones en la Forma D: (a) Compresiones; (b) Tracciones

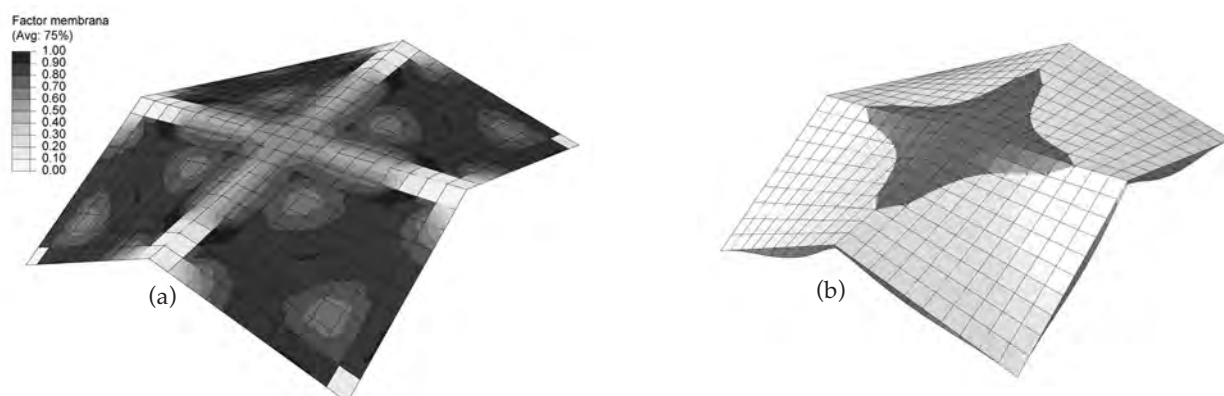


Figura 15. Forma D: (a) Factor de membrana; (b) Deformada, Blanco=Sin deformar, Gris=Deformada (x200)

3.1.2. Forma D

La forma D (Figura 12) la utiliza Candela por ejemplo en la fábrica de Sedas Parisina (1953) (Figura 13), en la Escuela de Danza del Parque de Chapultepec (1956) y en ciertos módulos de la Iglesia de la Milagrosa (1955), todas situadas en Ciudad de México. El modelo que hemos analizado tiene las mismas dimensiones que el del apartado anterior.

La Figura 14 recoge las direcciones principales de tensiones en la fibra media. Lejos de los bordes las direcciones forman 45° con las generatrices y conforme nos acercamos a ellos se van orientando en su dirección. En este caso los bordes están todos comprimidos, lo que se corresponde con los cálculos de [1]. Al igual que en el caso anterior los valores de las tensiones son reducidos y admisibles para el hormigón. En este caso encontramos unas tracciones máximas de 1,23 MPa que aparecen en la fibra superior de los caballetes horizontales y unas compresiones máximas de 2,44 MPa en las zonas de los apoyos. En la Figura 15 aparece la distribución del factor de membrana. Podemos ver que, de acuerdo con el análisis de Candela, en las cumbreras con esfuerzos no equilibrados se genera una flexión no deseada, siendo mínimo aquí el índice de membrana.

3.2. Restaurante Los Manantiales

La cubierta de este restaurante situado en Xochimilco

(Ciudad de México) fue terminada en 1958. Está formada por la asociación de cuatro paraboloides hiperbólicos con bordes curvos de manera que se consigue una forma particular que hace que sea conocida popularmente como *La flor* (Figura 16). Son solo cuatro paraboloides porque las hojas opuestas forman parte de la misma superficie. Ya hemos explicado que la presencia de bordes curvos resta importancia a los esfuerzos no equilibrados en esas zonas lo cual da lugar a la posibilidad de obtener formas más espectaculares al no precisarse apoyos especiales ni vigas de borde.

La estructura se apoya en el suelo en ocho puntos que forman un octógono regular. Cada apoyo dista 32,4 m del opuesto. El diámetro máximo de la estructura, es decir, la distancia entre los puntos más altos de dos bordes curvos opuestos, es de alrededor de 42,4 metros. La altura del punto central es 5,84 metros. El espesor de la lámina es 4 cm a excepción de los valles de unión entre paraboloides donde se regresa hasta los 12 cm de forma que esas zonas actúan como vigas de rigidez con sección en "V". Los ocho puntos de apoyo están zunchados por debajo del suelo mediante un octógono de barras de acero que soporta las cargas horizontales de forma que la cimentación solo se ve afectada de cargas verticales.

En la Figura 17 se muestran las direcciones principales de tensiones en la estructura. En el cuerpo de los paraboloides encontramos una dirección circunferencial de

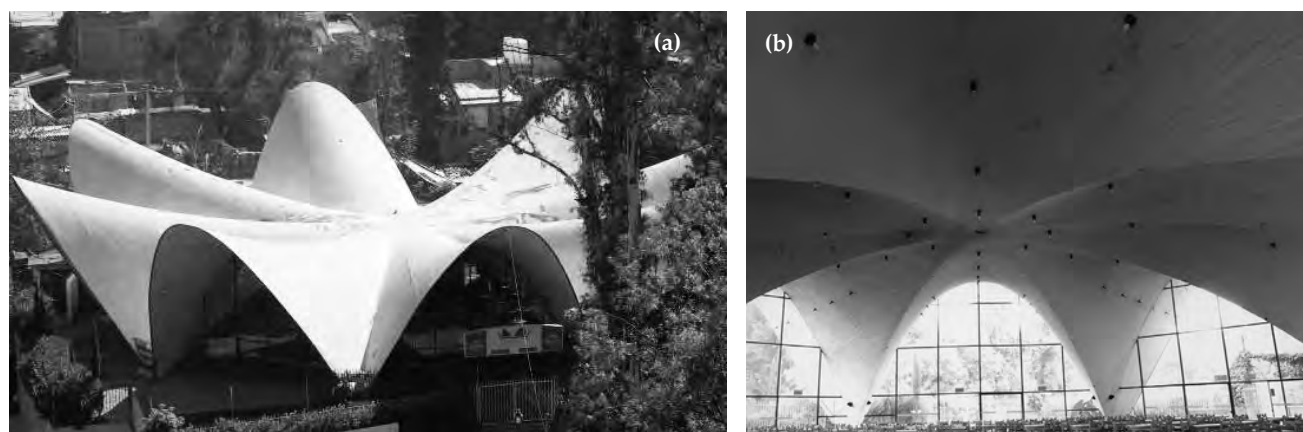


Figura 16. Restaurante Los Manantiales (México D.F.) (Fotos de [9]): (a) Exterior; (b) Interior

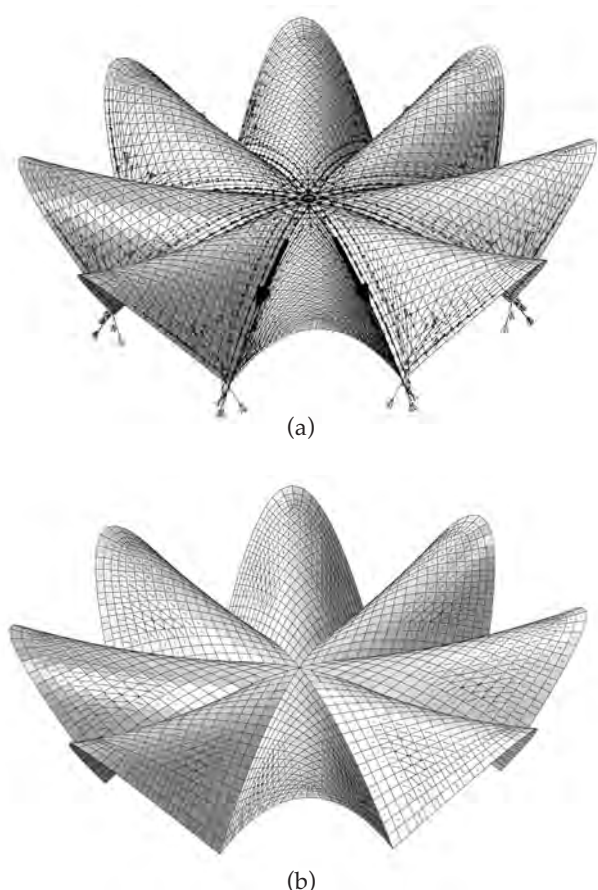


Figura 17. Direcciones principales de tensiones en la cubierta de Los Manantiales: (a) Compresiones; (b) Tracciones

compresión y una dirección radial de tracciones. Los bordes son principalmente caminos de compresión, sobre todo los valles regreusados que se comportan como arcos de rigidez que llevan las cargas a las cimentaciones.

Las tracciones máximas en la estructura son muy reducidas y no llegan a alcanzar el valor de 1,0 MPa. Las compresiones son mayores, en la fibra superior aparecen valores de hasta 4,15 MPa; esos valores aparecen muy concentrados en los apoyos. En los modelos de elementos finitos los apoyos se han definido como nodos fijados en todas direcciones; esa condición puntual hace que aparezcan valores de tensiones en esas zonas que no corresponden con la realidad donde el apoyo está más repartido. Fuera de esas zonas las compresiones máximas en la fibra superior aparecen en el centro de la estructura y alcanzan un valor de 2,73 MPa. En la fibra inferior las compresiones máximas aparecen en la zona de los apoyos y llegan a alcanzar los 2,49 MPa, que son valores totalmente admisibles para el hormigón.

En la Figura 18a se presenta el factor de membrana para la cubierta del restaurante Los Manantiales. Puede observarse que se presenta un comportamiento más de membrana que en los casos anteriores debido a la presencia de bordes curvos. El factor de membrana baja de valor en la zona cercana a los bordes libres, zona en la que, como puede verse en la Figura 18b, aparecen deformaciones debidas a flexión.

Después de que Candela diseñara esta estructura, se ha utilizado el mismo modelo, por ejemplo, en el restaurante Seerose de Postdam (1982) y en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia (2002) en cuya concepción participó el propio Félix Candela.

3.3. Iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe

En el año 1963 comienza la construcción de la denominada popularmente *Iglesia de los Mexicanos* en Madrid, con proyecto de Enrique de la Mora y Félix Candela. Colabora asimismo en la obra José A. Torroja Cavanillas. El proyecto de la cubierta puede consultarse en la Biblioteca de la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid ya que fue presentado por el profesor Avelino Samartín, que trabajó en el proyecto, para la obtención del título de Doctor Ingeniero. La cubierta está formada por ocho paraboloides hiperbólicos, con un vértice central más elevado a semejanza de un sombrero mexicano. La planta es un octógono de 20,5 metros de lado.

En este caso los bordes de los ocho paraboloides son bordes rectos, pero las condiciones de contorno son más restrictivas que en los paralelogramos alabeados asociados. Los ocho bordes exteriores están apoyados en unos contrafuertes y unos tímpanos como puede verse en la imagen de la Figura 19. Los bordes de unión entre los

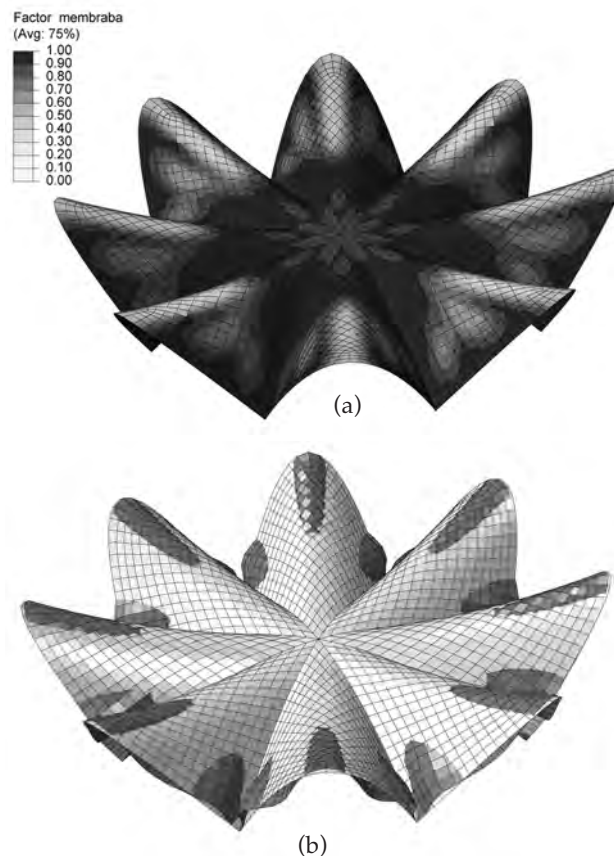


Figura 18. Cubierta de Los Manantiales: (a) Factor de membrana; (b) Deformada, Blanco=Sin deformar, Gris= Deformada (x400)



(a)



(b)

Figura 19. Nuestra Señora de Guadalupe: (a) Exterior; (b) Interior

paraboloides exteriores y los interiores solamente se apoyan en los puntos bajos, pero se refuerzan con unas vigas de rigidez que sujetan más efectivamente las láminas. Los paraboloides centrales están unidos mediante unas cristalerías sujetas por elementos metálicos. En el modelo los bordes exteriores se han conside-

rado apoyados de manera continua y se ha considerado la presencia de las vigas de rigidez (Figura 20). El espesor de los paraboloides es 4 centímetros.

En la Figura 21 se muestra parte de uno de los cálculos de Candela en los que proporciona los valores de fuer-

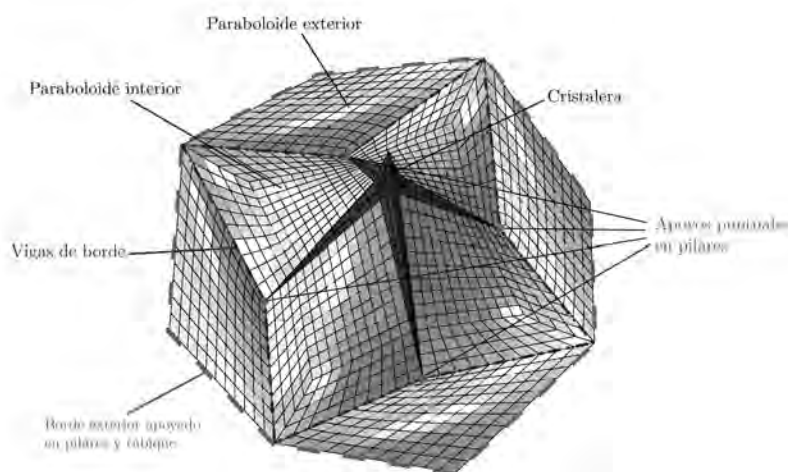


Figura 20. Descripción estructural de la cubierta de Guadalupe

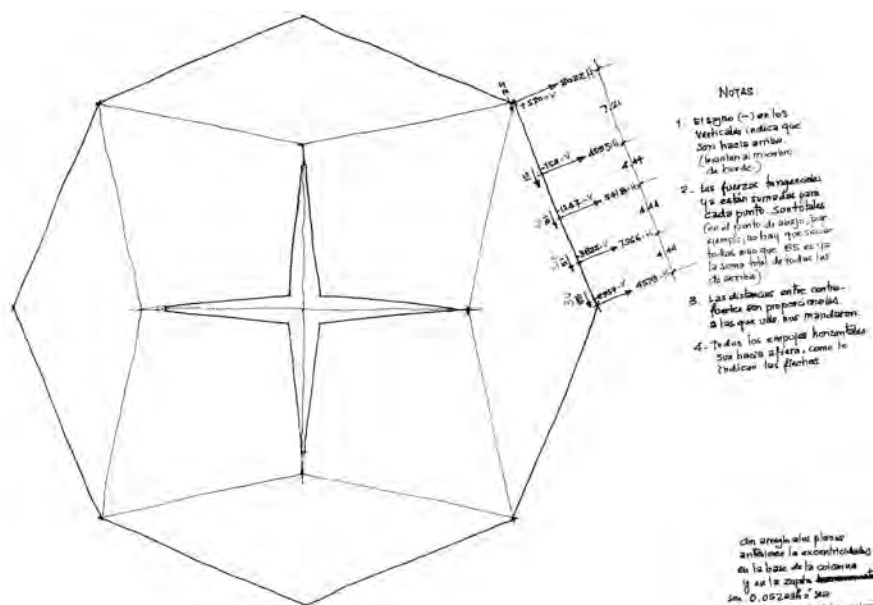


Figura 21. Cálculos de Candela para el proyecto de la iglesia de Guadalupe en Madrid relacionados con las reacciones de borde

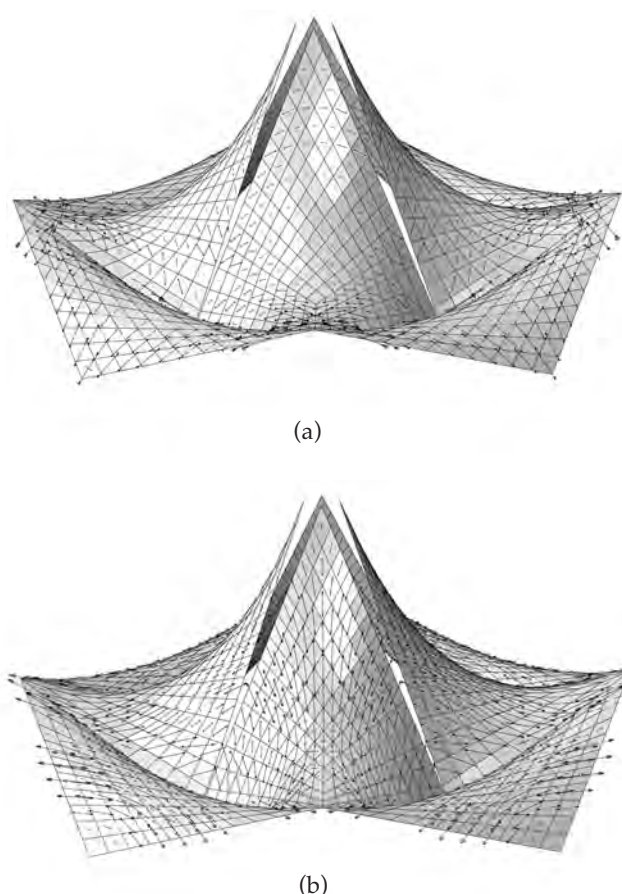


Figura 22. Direcciones principales de tensiones en la cubierta de Ntra. Sra. de Guadalupe: (a) Compresiones; (b) Tracciones

zas necesarias en los apoyos del borde exterior, aspecto que ya se ha comentado antes que resulta esencial para garantizar el funcionamiento como membrana, y al que, como vemos, Candela dedica su atención preferente.

Las direcciones principales de tensiones se muestran en la Figura 22. Al igual que sucede en la estructuras anteriores, las tensiones de tracción son reducidas y alcanzan un valor máximo de 2,89 MPa en la fibra inferior y de 1,83 MPa para la fibra superior. En cuanto a las compresiones los valores máximos están en torno a 3,0 MPa en ambas caras. En la Figura 23 se presenta el factor de membrana para la cubierta. Su valor es muy elevado en la mayor parte de la cubierta y sólo se aleja de la unidad en las zonas próximas a las vigas de borde donde las condiciones de apoyo hacen que aparezcan unas deformaciones de flexión que desvían el comportamiento del de membrana puro.

4. EFECTOS DE LA FISURACIÓN

Aunque las tensiones de tracción en el hormigón obtenidas anteriormente son reducidas, es muy probable que aparezcan fisuras en el material debido por ejemplo a movimientos en los apoyos, imperfecciones geométricas, defectos de construcción o por la propia aleatoriedad del hormigón. Esa fisuración dará a lugar a una redistribu-

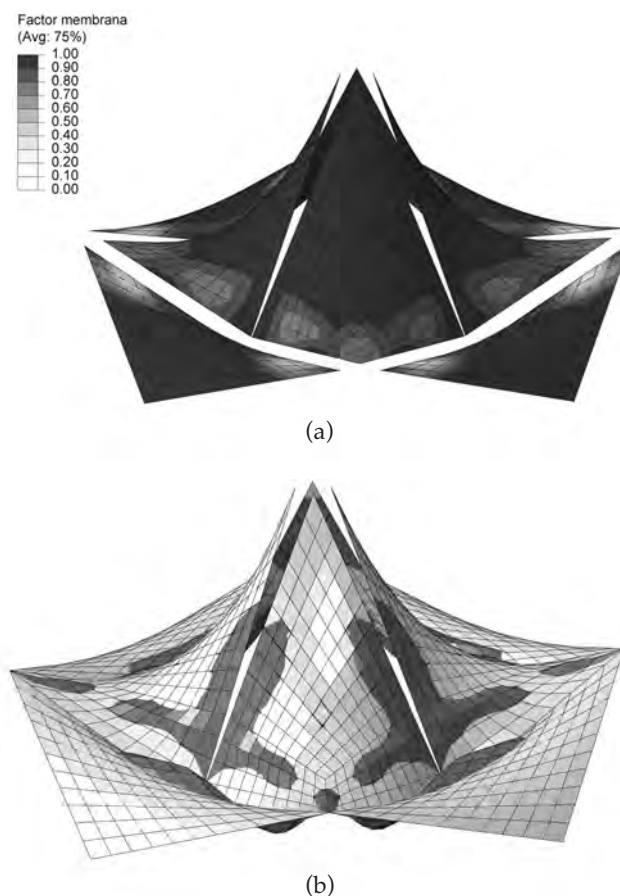


Figura 23. Cubierta de Guadalupe: (a) Factor de membrana; (b) Deformada, Blanco=Sin deformar, Gris=Deformada (x500)

ción tensional que podrá hacer variar el comportamiento de la lámina. La influencia de ese fenómeno se analiza mediante un análisis no lineal con un modelo de hormigón de fisura cohesiva discreta [10] considerando una resistencia a tracción de 2,5 MPa. En este tipo de modelos las fisuras aparecen cuando las tensiones llegan a una superficie llamada “de detección de fisuras”. La plastificación por compresión se controla mediante la denominada “superficie de compresión”, aunque en los casos presentados en este artículo las tensiones de compresión son bajas y no se alcanza nunca esa superficie. En la Figura 24 se muestra la definición de esas superficies en función de las tensiones principales. Para el caso de tracción uniaxial, en una primera fase, la tensión crece con la deformación con una constante de proporcionalidad que es el módulo elástico del material hasta alcanzar la resistencia a tracción del hormigón. A partir de ahí comienza la formación de la fisura (punto A) y la capacidad resistente del hormigón va decreciendo hasta anularse cuando la fisura está completamente desarrollada, lo que sucede para una apertura de fisura de 0,05 mm. La ley de ablandamiento se ha tomado lineal [11] (Figura 24). La armadura se dispone con la misma orientación y cuantía que en las estructuras reales. En cada elemento se consideran 9 puntos equidistribuidos en el espesor de la lámina para considerar la variación del estado tensional en las diferentes fibras. En estos cálculos se considera la no linealidad geométrica aunque, como en el cálculo elástico lineal, no tiene apenas influencia.

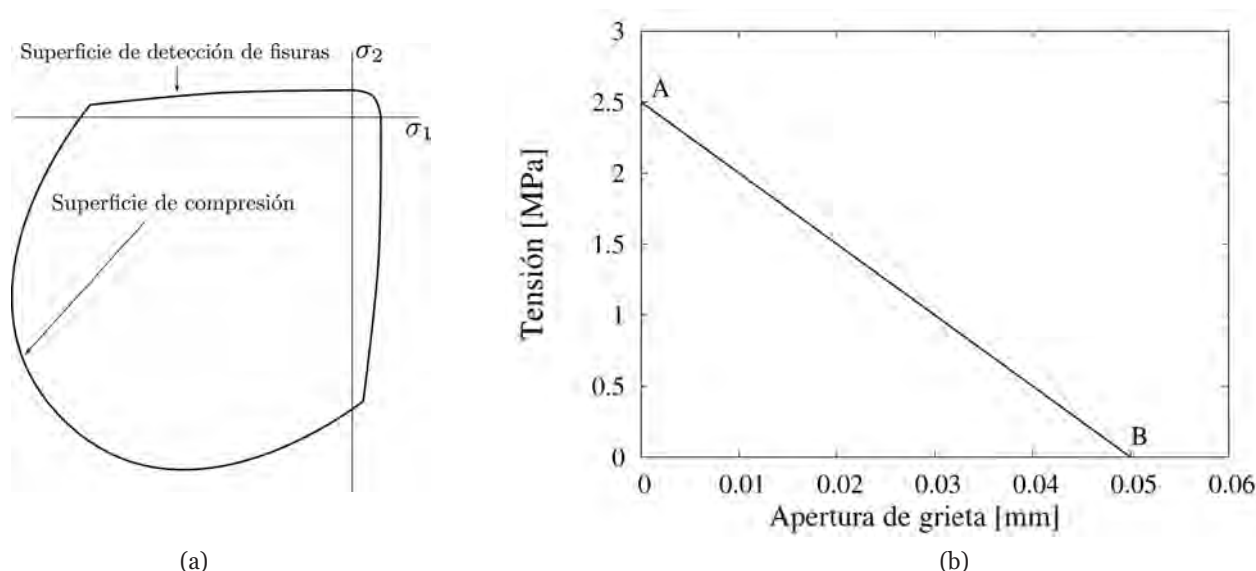


Figura 24. Modelo de hormigón de fisura cohesiva: (a) Superficies de plastificación y fisuración; (b) Diagrama tensión-deformación en tracción uniaxial

Este análisis se realiza en la forma A (paraguas) y en la cubierta de la Iglesia de Guadalupe debido a que es en esas estructuras donde las tracciones alcanzan valores suficientemente altos. Las Figuras 25 y 26 muestran las zonas fisuradas y el factor de membrana en ambas estructuras; como puede verse los valores son casi idé-

nticos a los obtenidos cuando no se considera la fisuración (Figuras 9 y 23). En el caso de la forma A aparecen fisuras en la fibra superior de la zona media de los bordes libres (elementos marcados en blanco en la Figura 25), que es la zona donde se concentran las mayores tracciones. En la Iglesia de Guadalupe apare-

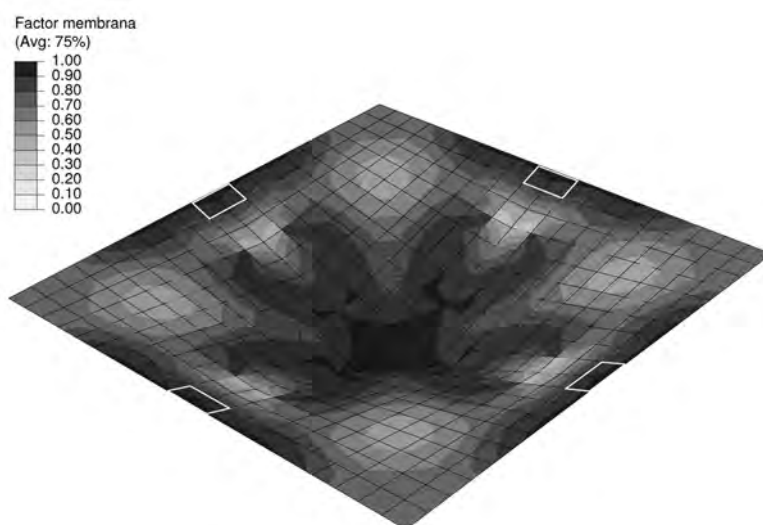


Figura 25. Factor de membrana en la Forma A considerando fisuración ($f_{ct}=2,5$ MPa)

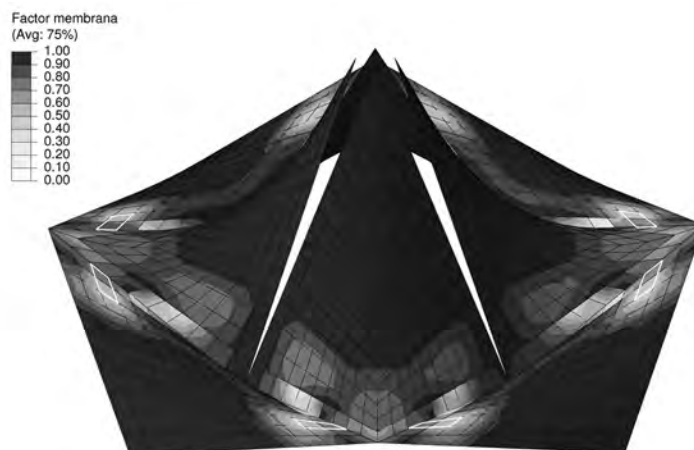


Figura 26. Factor de membrana en la Iglesia de Guadalupe considerando fisuración ($f_{ct}=2,5$ MPa)

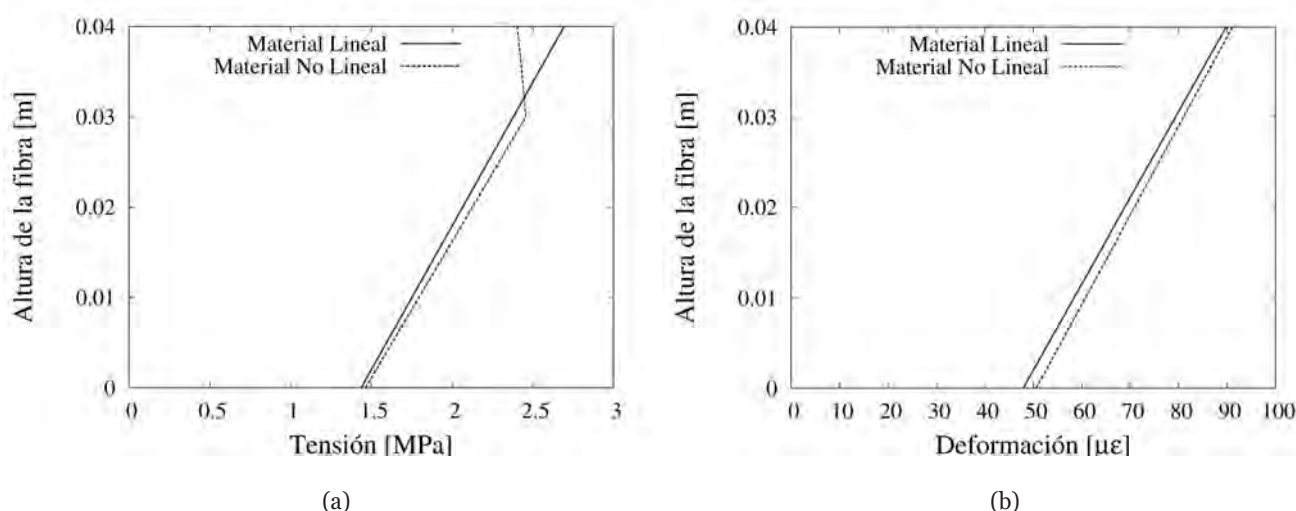


Figura 27. Sección fisurada de la forma A con material lineal y no lineal: (a) Tensiones; (b) Deformaciones

cen en la fibra inferior de las zonas indicadas en la Figura 26, que también es donde se obtenían las mayores tracciones en el cálculo elástico. Los valores de tensiones en las estructuras son prácticamente idénticos, aunque, lógicamente, ya no aparecen tracciones mayores que 2,5 MPa. La Figura 27 muestra las tensiones y deformaciones en la dirección perpendicular a una de las fisuras de la forma A obtenidas en el cálculo lineal y en el no lineal. En el cálculo lineal la fibra superior tiene unas tracciones de 2,7 MPa. Esas tensiones superan la resistencia a tracción del hormigón, que se ha fijado en 2,5 MPa, por eso en el cálculo no lineal aparece una fisura en esa sección y la capacidad resistente de las fibras superiores se reduce dando lugar a un quiebro en la ley de tensiones de la sección. La fisura es incipiente y ninguna fibra llega a perder completamente su capacidad resistente. Como se ve la profundidad de la fisura es alrededor de 1 cm. Debido a ese efecto, las deformaciones son ligeramente mayores en el cálculo no lineal.

Si consideramos un caso más extremo en el que la resistencia a tracción del hormigón se supone igual a 1,0 MPa,

las fisuras no sólo aparecen en los bordes, sino que se extienden por gran parte de la lámina en dirección aproximadamente perpendicular a las direcciones principales de tracción obtenidas en el cálculo elástico y mostradas anteriormente. En la Figura 28 se muestra el factor de membrana y la dirección de la fisura en cada elemento. El factor de membrana aumenta en los bordes, pero en el resto de la lámina sigue tomando valores muy similares a los presentados anteriormente. Las tensiones en la estructura también son muy similares con la salvedad de que ya no aparecen tracciones superiores a 1,0 MPa. La Figura 29 muestra la distribución de tensiones en dirección normal a una fisura que se ha desarrollado completamente; como puede verse hay una zona cuya contribución es nula porque ya se ha alcanzado el punto B del diagrama tensión-apertura (Figura 24).

5. CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

Se ha realizado un análisis elástico de algunas obras de Candela, contradiciendo en cierta medida los principios

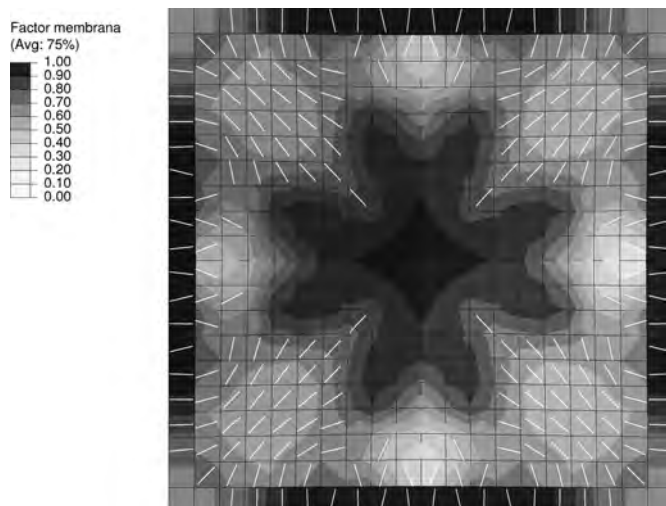


Figura 28. Factor de membrana en la Forma A considerando fisuración ($f_{ct}=1,0$ MPa) y orientación de las fisuras

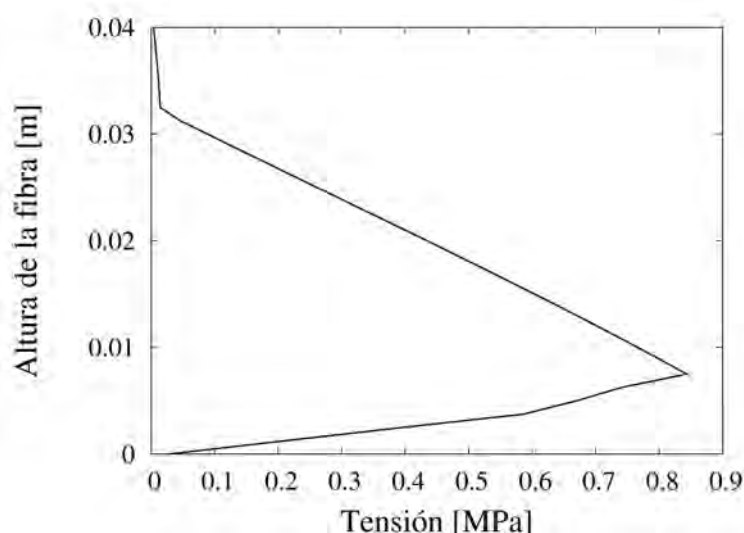


Figura 29. Distribución de tensiones en una fisura totalmente desarrollada en la forma A ($f_{ct}=1,0$ MPa)

del propio autor que defendió un cálculo basado en consideraciones de equilibrio como hemos explicado anteriormente. En ese sentido conviene mencionar la polémica que se suscitó en la redacción de las recomendaciones para láminas del American Concrete Institute (ACI) [12]. Es de destacar la carta que escribe el arquitecto al presidente del comité, Anton Tedesco. En ella Candela explica los motivos por los que emite un voto negativo a las normas propuestas y advierte que, en el caso de no ser aceptado ese voto, renuncia a ser miembro del comité [9].

La conclusión principal que podemos sacar de los resultados expuestos es que los cálculos y análisis de Félix Candela quedan confirmados por nuestros modelos. Y esto cobra mayor importancia si consideramos que nuestros cálculos son elásticos y que Candela se basa en las condiciones de equilibrio como hemos explicado.

En todos los modelos analizados se confirma la importancia de las condiciones de contorno que hacen que el comportamiento de la estructura se acerque o aleje del estado de membrana como explicó Candela. En el caso de bordes libres las deformaciones hacen que aparezcan flexiones secundarias que reducen el valor del factor de membrana. Cuando los bordes son curvos se simplifica esa exigencia pudiéndose obtener formas más espectaculares como se demuestra en el análisis de la cubierta del restaurante Los Manantiales.

En todos los casos estudiados las tensiones, tanto de tracción como de compresión, son reducidas y admisibles para el hormigón, aunque en algunas zonas puede ser conveniente disponer armadura adicional para evitar problemas derivados de la fisuración. Conviene recordar que el caso de carga empleado es el del peso propio multiplicado por dos, que no corresponde a un caso real pero que se considera que cubre otras acciones como las sobrecargas.

En el caso de considerar la no linealidad del material y suponer una resistencia a tracción reducida aparecen

fisuras en las láminas, lo que da lugar a una redistribución de tensiones en la estructura, pero el comportamiento global sigue siendo de membrana y las tensiones en la lámina apenas varían, salvo que, como es lógico, dejan de aparecer tracciones mayores que la resistencia a tracción del hormigón. La no linealidad geométrica no tiene influencia en los resultados.

Como conclusiones más particulares que solo atañen a las formas A y D podemos reseñar que en los modelos de los paralelogramos alabeados asociados se confirma el signo de las tensiones en los bordes mostrado por Candela [1]. En el caso de la forma A también se confirma que el análisis simplificado de la estructura como un voladizo da unos resultados muy próximos a los obtenidos con el modelo de elementos finitos.

REFERENCIAS

- [1] CANDELA F. "Structural applications of hyperbolic paraboloidal shells". *ACI Journal Proceedings*. 1955, vol. 51, nº 1, p. 397-416.
- [2] REDDY J. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2007. 547 p.
- [3] FABER C. *Candela: The Shell Builder*. New York: Reinhold Publishing Corporation, 1963. 240 p.
- [4] CANDELA, F. *En defensa del formalismo y otros escritos*. Bilbao: Xarait Ediciones, 1985. 172 p.
- [5] CANDELA F. "Hacia una nueva filosofía de las estructuras". *Student Publications of the School of Design*, North Carolina State College, 1955.
- [6] CANDELA F. "General formulas for membrana stresses in hyperbolic paraboloidal shells". *ACI Journal Proceedings*. 1960, vol. 57.

- [7] PUCHER A. "Über den spannungszustand in doppelt gekrummten flachen". *Beton und Eisen*. 1934, vol. 33.
- [8] ABAQUS. Abaqus Incorporation. User's Manual, 2008.
- [9] MOREYRA GARLOCK M.E. y BILLINGTON D.P. *Félix Candela. Engineer, Builder, Structural Artist*. Princeton: University Art Museum – Yale University Press, 2008. 208 p.
- [10] HILLERBORG A., MODEER M. y PETERSSON P.E. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements". *Cement and Concrete Research*. 1976, vol. 6, p. 773-782.
- [11] CRISFIELD M. A. "Variable step-lengths for nonlinear structural analysis". *Technical Report 1049, Transport and Road Research Lab, Crowthorne, England*, 1982.
- [12] ACI Committee 334. "Concrete shell structures: Practice and commentary". *ACI Journal Proceedings*, Vol. 61, p. 1091-1108, 1964.